

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

PRÉAMBULE

L'objet du problème est de déterminer les endomorphismes de l'espace vectoriel des matrices carrées complexes d'ordre n conservant certaines propriétés de ces matrices. La première partie étudie la conservation du rang 1 et celle de l'inversibilité. Les deuxième et troisième parties, qui sont indépendantes de la première, préparent à l'étude, effectuée dans la quatrième partie, de la conservation du groupe unitaire et de celle de certaines normes.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, \mathbb{C} le corps des nombres complexes, \mathcal{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1.

$M_{p,q}(\mathbb{C})$ étant l'espace vectoriel des matrices complexes à p lignes et q colonnes, dont l'élément nul est noté 0, on pose :

- $\mathcal{E} = M_{n,n}(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices carrées d'ordre n);
- $\mathcal{C} = M_{n,1}(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices colonnes à n lignes);
- $\mathcal{L} = M_{1,n}(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices lignes à n colonnes);
- $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus \{0\}$
- $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \{0\}$

Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$, ensemble des matrices inversibles de \mathcal{E} , sera noté \mathcal{G} .

Enfin, \mathcal{R}_1 désignera l'ensemble des matrices de rang 1 de \mathcal{E} et $\overline{\mathcal{R}}_1$ l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à 1 de \mathcal{E} . On a donc $\overline{\mathcal{R}}_1 = \mathcal{R}_1 \cup \{0\}$.

PREMIÈRE PARTIE

Pour P et Q éléments de \mathcal{G} , on définit deux endomorphismes $T_{P,Q}$ et $T'_{P,Q}$ de \mathcal{E} par :

$$\forall A \in \mathcal{E} \quad T_{P,Q}(A) = PAQ \quad T'_{P,Q}(A) = P {}^t A Q \quad ({}^t A \text{ est la transposée de } A)$$

et on désigne par γ (resp. γ') l'ensemble des endomorphismes $T_{P,Q}$ (resp. $T'_{P,Q}$) pour P et Q décrivant \mathcal{G} . On pose $\Gamma = \gamma \cup \gamma'$.

γ et Γ sont, de manière immédiate, des sous-groupes du groupe linéaire $GL(\mathcal{E})$. On ne demande pas de le démontrer.

A

On se propose d'établir ici que les endomorphismes T de \mathcal{E} tels que $T(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$ sont les éléments de Γ .

1° Montrer que si T appartient à Γ alors $T(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$.

2° Établir que \mathcal{R}_1 est égal à l'ensemble $\mathcal{E}' \mathcal{L}'$ des produits XV d'un élément X de \mathcal{E}' par un élément V de \mathcal{L}' .

3° Soient alors XV et $X'V'$ deux éléments de \mathcal{R}_1 . Montrer que si $XV + X'V'$ appartient à $\overline{\mathcal{R}_1}$, alors l'un au moins des deux couples (X, X') et (V, V') est lié.

4° On désigne par Σ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension n de \mathcal{E} inclus dans $\overline{\mathcal{R}_1}$.

Montrer que Σ est exactement constitué des éléments de l'une des deux formes suivantes :

- a. $X\mathcal{L}$ (ensemble des produits XV quand V décrit \mathcal{L}) avec X dans \mathcal{E}' .
- b. $\mathcal{E}V$ (ensemble des produits XV quand X décrit \mathcal{E}) avec V dans \mathcal{L}' .

X et X' étant deux éléments de \mathcal{E}' , préciser $X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L}$.

X et V étant respectivement éléments de \mathcal{E}' et \mathcal{L}' , préciser $X\mathcal{L} \cap \mathcal{E}V$.

5° Dans cette question et les deux suivantes, T désigne un endomorphisme de \mathcal{E} tel que $T(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$.

Montrer que l'image par T d'un élément de Σ est un élément de Σ .

6° On suppose ici l'existence de deux éléments non colinéaires de \mathcal{E}' , X_1 et X_2 , tels que $T(X_1\mathcal{L}) = Y_1\mathcal{L}$ et $T(X_2\mathcal{L}) = Y_2\mathcal{L}$ avec Y_1 et Y_2 dans \mathcal{E}' .

a. Prouver l'existence d'une matrice Q de \mathcal{G} telle que :

$$\forall V \in \mathcal{L} \quad T(X_1V) = Y_1VQ.$$

b. En déduire que $T(X_1\mathcal{L}) \neq T(X_2\mathcal{L})$.

c. Montrer que pour tout V appartenant à \mathcal{L}' , $T(\mathcal{E}V)$ est de la forme $\mathcal{E}U$ avec U dans \mathcal{L}' .
Que peut-on dire de $T(X\mathcal{L})$ pour X appartenant à \mathcal{E}' ?

d. En déduire, pour tout X dans \mathcal{E}' , l'existence d'un élément Y dans \mathcal{E}' tel que :

$$\forall V \in \mathcal{L} \quad T(XV) = YVQ \quad \text{où } Q \text{ est la matrice obtenue au a.}$$

e. Montrer que T appartient à γ .

7° Établir que si l'hypothèse du 6° n'est pas satisfaite, alors T appartient à γ' .

B

On se propose maintenant d'établir que les endomorphismes T de \mathcal{E} tels que $T(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$ sont les éléments de Γ .

1° Montrer que si T appartient à Γ alors $T(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$.

2° Soit A une matrice non inversible de \mathcal{E} et r son rang.

a. Montrer l'existence d'une matrice M de \mathcal{G} telle que pour tout élément λ de \mathbb{C} , $M - \lambda A$ soit inversible.
(On pourra d'abord établir la propriété pour une matrice particulière A de rang r choisie de forme simple.)

b. Montrer de même l'existence d'une matrice N de \mathcal{G} telle que $N - \lambda A$ soit non inversible pour exactement r valeurs distinctes de λ .

3° On considère dans cette question un endomorphisme T de \mathcal{E} tel que $T(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$.
Utiliser la question 2° pour établir, pour toute matrice A de \mathcal{E} :

a. Si A est non inversible alors $T(A)$ est non inversible.

b. Le rang de $T(A)$ est supérieur ou égal au rang de A .

Prouver alors que T conserve le rang et que T appartient à Γ .

DEUXIÈME PARTIE

On considère un espace hermitien E de dimension n , dont la norme est notée $x \rightarrow \|x\|$ et le produit scalaire $(x, y) \rightarrow (x | y)$; $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre de ses endomorphismes, $\mathcal{U}(E)$ son groupe unitaire. L'adjoint d'un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est noté u^* ; u est dit hermitien si $u = u^*$, et hermitien positif si, de plus, ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls.

A

1° Vérifier que pour tout endomorphisme u de E , $u^* \circ u$ est hermitien positif, et de même rang que u .

Les n valeurs propres (distinctes ou non) de $u^* \circ u$ sont rangées en ordre décroissant $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ et on pose, pour $i = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Ces nombres α_i sont appelés les valeurs singulières de l'endomorphisme u .

2° Montrer l'existence de deux bases orthonormales de E , (e_1, e_2, \dots, e_n) et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ telles que pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ $u(e_i) = \alpha_i e'_i$. (On prendra pour (e_i) une base de vecteurs propres de $u^* \circ u$).

En déduire l'existence d'un endomorphisme hermitien h de valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et d'un endomorphisme unitaire w tels que $u = w \circ h$.

3° Quelles sont les valeurs singulières d'un endomorphisme hermitien ?

4° Montrer que deux endomorphismes u et v de E ont les mêmes valeurs singulières si, et seulement si, il existe w et w' unitaires tels que $u = w \circ v \circ w'$.

On dira alors que u et v sont unitairement équivalents.

B

k étant un entier compris entre 1 et n , on définit $\varphi_k : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$ en posant, pour tout endomorphisme u de E , $\varphi_k(u) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ où $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sont les valeurs singulières de u rangées, on le rappelle, en ordre décroissant.

On définit également $\psi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$\psi(u) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)^{1/2} = (\text{Tr}(u^* \circ u))^{1/2}. \quad (\text{Tr désigne la trace.})$$

1° Montrer que ψ est une norme hermitienne sur $\mathcal{L}(E)$.

\mathcal{F}_k désignant l'ensemble des familles orthonormales (x_1, \dots, x_k) d'éléments de E , on se propose d'établir, pour tout endomorphisme u de E :

$$(1) \quad \varphi_k(u) = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{F}_k \\ (y_1, \dots, y_k) \in \mathcal{F}_k}} \sum_{i=1}^k |(u(x_i) | y_i)|$$

2° Soit h hermitien positif et (x_1, \dots, x_k) un élément de \mathcal{F}_k .

Établir que $\sum_{i=1}^k (h(x_i) | x_i) \leq \varphi_k(h)$ (on pourra, par exemple, vérifier que le premier membre s'écrit $\text{Tr}(p \circ h)$ où p est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel engendré par (x_1, \dots, x_k) et exprimer cette trace dans une base convenable).

En déduire que $\varphi_k(h) = \sup_{(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{F}_k} \sum_{i=1}^k (h(x_i) | x_i)$

3° Établir l'égalité (1) pour un endomorphisme hermitien positif, puis pour tout endomorphisme u de E .

4° Montrer que φ_k est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

C

Soit F un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N , et S la sphère unité de F . Un élément x de F sera dit élément extrémal de S ou S -extrémal si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i. $x \in S$
- ii. $\forall (y, z) \in S^2 \quad x = \frac{1}{2}(y + z) \Rightarrow x = y = z$

Ceci équivaut à

- i. $x \in S$
- ii. $\forall (y, z) \in S^2, \forall \lambda \in]0, 1[\quad x = \lambda y + (1 - \lambda)z \Rightarrow x = y = z$

(On ne demande pas de vérifier cette équivalence.)

1° Montrer que si x est S -extrémal et si deux éléments y et z de F vérifient

$$x = \frac{1}{2}(y + z) \quad \text{et} \quad N(y) + N(z) = 2, \quad \text{alors} \quad y = N(y)x \quad \text{et} \quad z = N(z)x.$$

2° Établir que si N est hermitienne, tout élément de S est S -extrémal.

D

S_k désigne la sphère unité de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{L}(E), \varphi_k)$.

1° On écrit u appartenant à $\mathcal{L}(E)$ sous la forme $w \circ h$ obtenue au A 2°.

Montrer l'équivalence : u S_k -extrémal $\Leftrightarrow h$ S_k -extrémal.

2° Soit h un endomorphisme hermitien positif, autre qu'une homothétie, et de valeurs propres $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$.

a. En utilisant une base orthonormale dans laquelle la matrice de h est diagonale, montrer que si h est S_k -extrémal alors :

$$(2) \quad k \neq 1 \quad \text{et} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (1, 0, \dots, 0).$$

b. Réciproquement, montrer que si (2) est vérifiée, h est S_k -extrémal. (On pourra d'abord montrer que si $h = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ avec u_1 et u_2 dans S_k , alors $\psi(u_1) = \psi(u_2) = 1$.)

3° On suppose maintenant que h est l'homothétie de rapport $1/k$.

a. Montrer que si h est S_k -extrémal alors $k \neq n$.

b. Réciproquement, établir que si $k \neq n$, h est S_k -extrémal.

4° Quels sont les éléments extrémaux de S_k ?

TROISIÈME PARTIE

On conserve les notations de la deuxième partie; on considère un endomorphisme t de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ (donc t élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$), tel que $t(\mathcal{U}(E)) \subset \mathcal{U}(E)$. On rappelle que $\mathcal{U}(E)$ est connexe.

On se propose de prouver que l'image par t d'un endomorphisme de rang 1 est un endomorphisme de rang 1.

1° Soient u et v deux endomorphismes de E tels que, pour tout λ dans \mathbb{U} , $\lambda u + v$ soit unitaire.

Montrer que $u^* \circ v = 0$ et que $(u^* \circ u) + (v^* \circ v) = Id_E$.

2° Soient u_1, u_2, \dots, u_p ($p \geq 2$) des endomorphismes de E tels que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{U}^p$, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p$ soit unitaire.

a. Montrer que pour tout (i, j) avec $i \neq j$ $u_i^* \circ u_j = 0$, et que $\sum_{i=1}^p u_i^* \circ u_i = Id_E$.

En déduire que $\sum_{i=1}^p \text{rg}(u_i) = n$. ($\text{rg}(u)$ désigne le rang de u).

b. Montrer que, pour tout endomorphisme unitaire w , $\sum_{i=1}^p \text{rg}(t(u_i \circ w)) = n$.

c. En déduire que, pour i donné, le rang de $t(u_i \circ w)$ reste constant lorsque w décrit $\mathcal{U}(E)$.

d. Montrer que, pour tout endomorphisme u unitairement équivalent à u_i , $\text{rg}(t(u)) = \text{rg}(t(u_i))$.

3° Vérifier que l'on peut trouver un entier p et des endomorphismes u_1, \dots, u_p de rang 1 tels que l'hypothèse du 2° soit satisfaite.

En déduire que l'image par t d'un endomorphisme de rang 1 est un endomorphisme de rang 1.

QUATRIÈME PARTIE

On reprend les notations de la première partie et on désigne par \mathcal{U} le groupe unitaire d'ordre n , constitué des matrices A de \mathcal{E} telles que $A^*A = I_n$ où A^* est l'adjointe de A .

Pour A dans \mathcal{E} et k entier compris entre 1 et n , on pose :

$$\Phi_k(A) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k,$$

$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ désignant les racines des valeurs propres, distinctes ou non, de la matrice hermitienne positive A^*A .

D'après la deuxième partie, Φ_k est une norme sur \mathcal{E} .

On désigne par γ_0 (resp. γ'_0) l'ensemble des endomorphismes $T_{P,Q}$ (resp. $T'_{P,Q}$) obtenus pour P et Q décrivant \mathcal{U} ; on pose $\Gamma_0 = \gamma_0 \cup \gamma'_0$.

1° Vérifier que si T appartient à Γ_0 alors T possède les propriétés suivantes :

$$T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$$

$$\text{Pour tout entier } k \text{ compris entre 1 et } n \text{ et toute matrice } A \text{ de } \mathcal{E}, \Phi_k(T(A)) = \Phi_k(A).$$

2° En utilisant les différents résultats établis dans le problème, démontrer, pour T endomorphisme de \mathcal{E} , les réciproques des propriétés établies au 1°. On démontrera successivement :

a. Si $T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ alors T appartient à Γ_0 ;

b. Si pour toute matrice A de \mathcal{E} , $\Phi_1(T(A)) = \Phi_1(A)$, alors T est dans Γ_0 ;

c. Si pour toute matrice A de \mathcal{E} , $\Phi_n(T(A)) = \Phi_n(A)$, alors T est dans Γ_0 ;

d. Si pour toute matrice A de \mathcal{E} , $\Phi_k(T(A)) = \Phi_k(A)$ où $k \neq 1$ et $k \neq n$, alors T est dans Γ_0 .